試閱本

10.2 極坐標中的常見曲線

■ 10.2　極坐標中的常見曲線

現在再來欣賞、探究幾條常見的曲線。

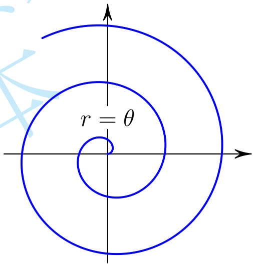
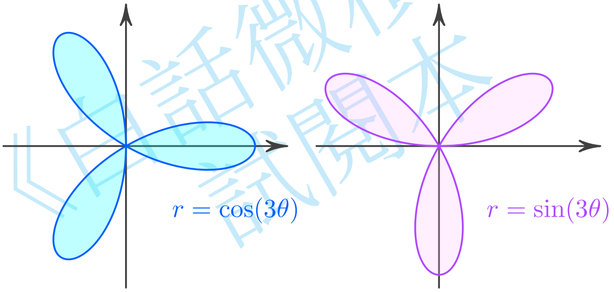
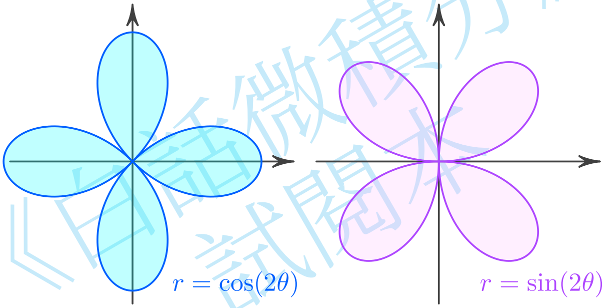


圖 10.1: 螺線

右圖這叫**阿基米德螺線**，這是為了紀念阿基米德研究出一些螺形曲線的性質而如此命名的。也有另一個稱呼，叫**等速螺線**，或簡稱叫**螺線**。因為現在 $r(\theta)$ 並不是只由三角函數這種週期函數組成，所以並不會繞一定角度後回到原來位置。r 就這樣一直遞增上去，離原點越來越遠。較一般而言，把方程式乘個常數，變成 $r = a\theta$ 。乘完也是螺線，多乘以 a 只不過是圖形的伸縮。至於 θ 的範圍，是 $\theta \geq 0$ 。



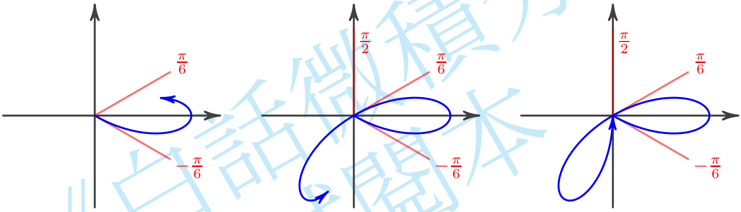
上圖這叫**三瓣玫瑰線**。方程式為 $r = \cos(3\theta)$ 或 $r = \sin(3\theta)$ 。長得差不多，只不過稍微旋轉一點角度。另外也有四瓣玫瑰線，如下圖。



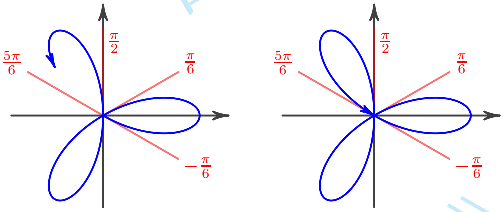
現在我們稍費點功夫，來仔細看玫瑰線的範圍，希望你看了以後可以更掌握住求出 θ 範圍的方法。

以 $r=\cos(3\theta)$ 為例。我們第一步先找出最特別的點：$r=0$ 的地方。於是解方程式 $r=\cos(3\theta)=0$，得到 $\theta=\pm\frac{\pi}{6}$，所以先描出 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 和 $\theta=-\frac{\pi}{6}$。

而我們知道，當 θ 從 $-\frac{\pi}{6}$ 跑到 $\frac{\pi}{6}$，這對 $\cos(3\theta)$ 來說，它內部是從 $-\frac{\pi}{2}$ 跑到 $\frac{\pi}{2}$，也就是第四、第一象限角。所以其值是由 0 出發，開始遞增，遞增到 $\theta=0$ 時來到極大值 $r=1$，接著開始遞減，$\theta=\frac{\pi}{6}$ 回到 $r=0$。當 θ 超過 $\frac{\pi}{6}$、還沒到 $\frac{\pi}{2}$ 時，cos 內部的角來到第二、三象限，取值為負。既然這段期間 r 是負的，動點就往對面跑。等 θ 來到 $\frac{\pi}{2}$ 時，動點剛好回到原點。



(a) $0\le\theta\le\frac{\pi}{12}$ (b) $0\le\theta\le\frac{5\pi}{12}$ (c) $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

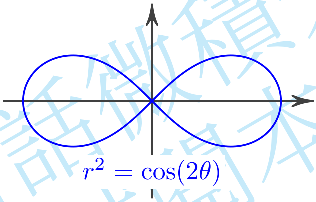


(d) $0\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$ (e) $0\le\theta\le\frac{5\pi}{6}$

同樣道理，當 θ 超過 $\frac{\pi}{2}$、還沒到 $\frac{5\pi}{6}$ 時，cos 內部的角來到第四、一象限，取值為正。等 θ 來到 $\frac{5\pi}{6}$ 時，動點又回到原點。

如果 θ 再繼續增加，在 $\frac{5\pi}{6}\le\theta\le\frac{7\pi}{6}$ 這範圍，cos 內部是第二、三象限，取值為負。這時候動點又要到對面，便跑出與剛剛 $-\frac{\pi}{6}$ 到 $\frac{\pi}{6}$ 這段重疊的路徑。所以若要描

述 $r = \cos(3\theta)$ 的 θ 範圍，用 $-\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$ 就可以了，或者也可以用 $0 \le \theta \le \pi$ (why?)。



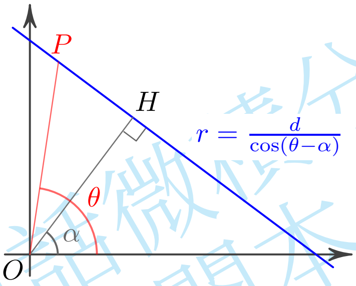
這個叫**雙紐線**（lemiscate），長得像無限大的符號。它的直角坐標方程式是

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = \left(x^2 - y^2\right)$$

1694 年，數學家 Johan Bernoulli 開始研究雙紐線，並將它命名為 lemniscatus，這在拉丁文中是「懸掛的絲帶」的意思。他為了求雙鈕線的弧長，而導致了對**橢圓積分**的研究。橢圓積分並不在大一微積分範圍內，它屬於較困難的領域。

如果要看雙紐線的 θ 範圍，相當容易。由等號左邊的 r^2，我們就知道它非負，所以等號右邊的 $\cos(2\theta)$ 也須非負。則 2θ 的範圍可以是由 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$，也可以是由 $\frac{3\pi}{2}$ 到 $\frac{5\pi}{2}$ 。這等於是讓 $\cos(2\theta)$ 取第四、第一象限角。

這樣便得到 2θ 的範圍，接著只要再除以 2，就得到 θ 的範圍是由 $-\frac{\pi}{4}$ 到 $\frac{\pi}{4}$（右邊那瓣），以及 $\frac{3\pi}{4}$ 到 $\frac{5\pi}{4}$（左邊那瓣）。



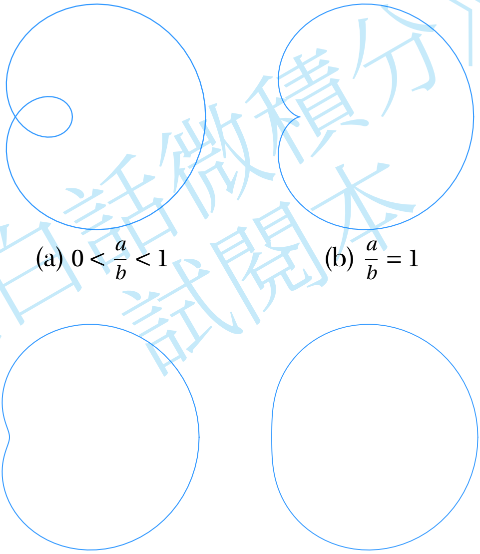
直線的極坐標方程，只要代 $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$ 就出來了，不過這裡提供另一種看法。設原點 O 到直線

的垂足為 H，O 到直線的的距離 $d=\overline{OH}$，$\overline{OH}$ 與 x 軸正向夾 α。若動點 P 的 θ 比 α 大，那麼 $\overline{OP}$ 與 $\overline{OH}$ 夾角為 $\theta-\alpha$，因 $\triangle POH$ 為直角三角形，故 $r\cos(\theta-\alpha)=d \ \Rightarrow r=\dfrac{d}{\cos(\theta-\alpha)}$。這樣就是直線的極坐標方程式了！

接下來再介紹一系列的曲線。對於 $a,b>0$，形如

$$r=a+b\begin{cases}\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{cases} \tag{10.1}$$

稱為**蚶線** (limacon)。若 $a=b$ 即為先前介紹的心形線。若 $b>a$ 則會有內圈，如圖 10.10 (a)；若 $b<a<2b$ 則無內圈，稱為凹蚶線；若 $a\geq 2b$ 則稱為凸蚶線。



(a) $0<\frac{a}{b}<1$ (b) $\frac{a}{b}=1$

(c) $1<\frac{a}{b}<2$ (d) $\frac{a}{b}\geq 2$

圖 10.2: $r=a+b\cos(\theta)$